

Príloha A - Vyučovacia hodina č. 1

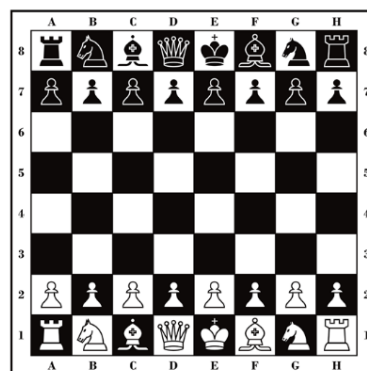
Téma hodiny: Exponenciálny rast

Cieľ hodiny: Pomocou krátkeho príbehu o vzniku šachu sa snažíme priblížiť žiakom princíp exponenciálneho rastu a zároveň poukázať na rozdiel takéhoto rastu s lineárnym. Stavíme na žiakových poznatkoch z oblasti mocnín a lineárnej funkcie.

Priebeh hodiny:

❖ Učiteľ začína hodinu krátkou diskusiou o šachu (5 min.):

- *Kto z vás pozná šach?*
- *Kto hral alebo hráva šach?*
- *Vedeli by ste nám o ňom niečo povedať?*
- *Čo je jeho princíp? Aké má pravidlá?*
- *A viete ako šach vlastne vznikol?*



➤ Po skončení diskusie povie legendu o vzniku šachu:

„Vznik šachu sa datuje do času okolo roku 500 AD (anno Domini – roku Pána). Dodnes sa s určitosťou nevie, ako táto strategická hra vznikla, avšak legenda vraví, že sa to stalo v Indii. V tom čase tam vládol nie veľmi spravodlivý kráľ Šahram. Jedného dňa však učený mudrc Sissa ben Dahir vymyslel hru, ktorú dnes poznáme pod menom Šach, pomocou ktorej mladému kráľovi otvoril oči a ten si uvedomil, že aj obyčajný pešiak, ktorý predstavuje obyčajný ľud, dokáže ovplyvniť priebeh hry. Za odmenu si Sissa ben Dahir požadoval zdanlivo skromnú odmenu: jedno zrnko pšenice za prvé políčko šachovnice, dve zrnká za druhé, štyri za tretie, osem za štvrté a atď.“ (Legenda o vzniku šachu, 2018) ¹

✎ Učiteľ následne žiakom zadá pokyny k činnosti vo dvojici (2 – 3 min.):

1. *Napište na papier váš odhad, koľko zrn pšenice musel kráľ nazhromaždiť a následne si odhady porovnajte medzi spolusediacimi. Vysvetlite si navzájom vlastné odhady.*

¹ Príbeh je zmienený aj v učebnici pre 2. ročník gymnázií (Kubáček, Z. (2010). Matematika pre 2. ročník gymnázií a 6. ročník gymnázií s osemročným štúdiom – druhá časť. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana.)

❖ Po skončení povie učiteľ študentom: *Podme sa teraz pozrieť koľko je to reálne. Z príbehu vieme, koľko zrn pšenice Sissa požadoval za prvé 4 políčka zo šachovnice. Postupne sa študentov pýta aj na počet zrn pšenice za ďalšie políčka:*

- *Koľko zrn bude teda na 5. políčku?*
- *Koľko zrn bude na 6. políčku?*
- *Koľko zrn bude na 7. políčku?*

✎ Následne zadá učiteľ ďalšiu úlohu ako pokračovanie predošlých otázok (5 min.):

2. *Zistite, koľko zrn požadoval Sissa za 64. políčko šachovnice.*

❖ Počas riešenia tejto úlohy sa učiteľ prechádza po triede a poskytuje pomoc vo forme otázok, pokiaľ sa žiaci nevedia s riešením ďalej pohnúť:

- *Aký je vzťah medzi jednotlivými políčkami?*
- *Viete podľa tohto vzťahu určiť hodnotu 8. políčka?*
- *Viete teda určiť hodnotu pre ľubovoľné políčko?*

➤ Žiakov nechávame prísť na to, že za posledné políčko požaduje Sissa 2^{63} zrn pšenice. Presnú hodnotu im po dopočítaní môže nadiktovať učiteľ z tabuľky (vid' príloha – tabuľka hodnôt) aby poukázal na veľkosť tohto čísla.

✎ Učiteľ môže zadať úlohu, ktorá načrtne ideu súčtu geometrickej postupnosti (10 min.):

3. *Zistite, koľko zrn pšenice mal kráľ Šahram celkovo nazhromaždiť.*

➤ Teraz sa musí učiteľ rozhodnúť, či sa bude venovať časovo náročnému dokazovaniu vzorca alebo sa bude snažiť žiakov naviesť na uvedomenie si istej podobnosti a to, že súčet prvých n políčok sa líši od množstva $(n + 1)$. políčka len o jedno zrnko. (teda $s_n = a_{n+1} - 1$)

Políčko	Množstvo zrníek za dané políčko	Celkové množstvo zrníek
1.	$2^0 = 1$	1
2.	$2^1 = 2$	3
3.	$2^2 = 4$	7
4.	$2^3 = 8$	15
5.	$2^4 = 16$	31
6.	$2^5 = 32$	63
7.	$2^6 = 64$	127

- ❖ Učiteľ môže poskytnúť nápoved', aby si žiaci začali vypisovať jednotlivé množstvá formou:
 - *Viete určiť aj spoločný počet zrn na prvých 4 políčkach?*
 - *A čo tak na prvých 5 políčkach?*
 - *Pripomínajú vám tieto hodnoty niečo?*
 - *Viete teraz určiť koľko zrn pšenice vlastne Sissa celkovo požadoval?*

- Žiakov nechávame prísť na to, že kráľ Šahram musí nazhromaždiť $2^{64} - 1$ zrn pšenice. Ak sa však nájde žiak, ktorý jednoducho nahodí jednotlivé hodnoty do kalkulačky a takýmto spôsobom doráta celkové množstvo zrn, bolo by vhodné porozprávať sa o forme, akou to kalkulačka zobrazila (napr. $1,844674407 \cdot 10^{19}$) a teda aká je nepresnosť daného výsledku.

- ❖ Po dopočítaní nechávame žiakom priestor na vysvetlenie ich spôsobu rátania, po ktorom sa učiteľ znovu pýta celej triedy: (5 min)
 - *Ako sa líši váš odhad so skutočnými hodnotami?*
 - *Kto sa trafil najbližšie? A kto vôbec nie?*
 - *Viete vysvetliť, prečo ste odhadovali takéto čísla?*
 - *Myslíte si, že bol kráľ schopný nazhromaždiť také množstvo pšenice?*

- Po odpovedaní na poslednú otázku, učiteľ dočíta príbeh zo začiatku hodiny:

„Matematici totiž spočítali, že aby kráľ Šahram mohol vyhovieť prianiu učencovi Sissy ben Dahira, bolo by treba toľko pšenice, ktorá by sa za 10 rokov vypestovala na celom zemskom povrchu, vrátane morí a oceánov.“ (Legenda o vzniku šachu, 2018)

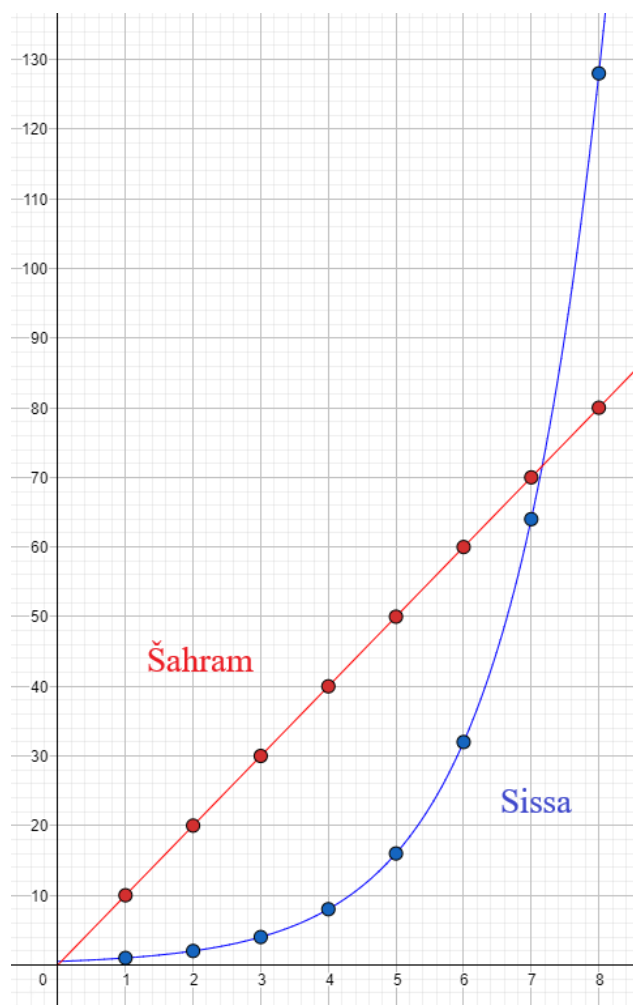
- ❖ Nasleduje otázka, ktorou sa dostávame k porovnaniu exponenciálneho a lineárneho rastu:
 - *Teraz si predstavte, že ste kráľov najvyšší radca. Aký protinávrh by ste poradili kráľovi, ktorý by sa spočiatku tváril ako drahší, no vyšiel by ho lacnejšie?*

- Žiakom necháme 2 – 3 minúty na premýšľanie a vysvetľovanie nápadov s cieľom, aby niekto navrhol protinávrh, ktorý bude rásť lineárne. Až po vytvorení takéhoto protinávrhu, sa bude môcť pokračovať v ďalšej úlohe, kde sa bude pracovať s týmto návrhom.

- ❖ Ak ale neprichádza žiaden návrh, ktorý by nám vyhovoval, učiteľ sa začne pýtať:
 - Aký počet zrn by sme mohli požadovať za 1. políčko?
 - Koľko zrn by sme chceli za 2. políčko?
 - A za 3. políčko by sme žiadali koľko zrn?
 - Môže sa tento počet líšiť od predošlého rovnako ako sa líšia za 1. a 2. políčka?
 - Môžeme analogicky pokračovať aj pre 4. či 5. políčko?

✎ Po vytvorení spoločného návrhu, prichádza úloha pre grafické porovnanie exponenciálneho a lineárneho rastu, po ktorom vyvolá učiteľ k tabuli dobrovoľníka kvôli náčrtu (10 min.):

4. Vytvorte grafy pre oba návrhy (kráľa Šahrama a vynálezcu Sissu) do jedného obrázku a následne ich porovnajte. V čom sa líšia?



- Oba grafy kreslíme len bodovo a nie ako spojité funkcie. Čiary na tomto obrázku nám slúžia len ako pomôcka pre lepšiu vizualizáciu.

- ❖ Učiteľ nechá študentov aby si overili svoje náčrty a následne sa pýta (5 min.):
 - *Čo je na jednotlivých návrhoch zaujímavé? V čom sa líšia?*
 - *Prečo sa tak grafy správajú?*
 - *Viete pomenovať, čo predstavuje váš návrh?*
 - *Ako by ste pomenovali nárast počtu zrn v návrhu vynálezcu Sissu?*

- Od žiakov očakávame, že v našom spoločnom návrhu budú vidieť lineárny rast, ktorý by už mali vedieť charakterizovať. To, čo ešte nepoznajú, je rast exponenciálny v návrhu vynálezcu Sissu, ktorého názov prezradí učiteľ až po záverečnej otázke.

Tabuľka hodnôt

Políčko	Množstvo zrníek za dané políčko	Celkové množstvo zrníek
1.	$2^0 = 1$	1
2.	$2^1 = 2$	3
3.	$2^2 = 4$	7
4.	$2^3 = 8$	15
5.	$2^4 = 16$	31
6.	$2^5 = 32$	63
7.	$2^6 = 64$	127
8.	$2^7 = 128$	255
9.	$2^8 = 256$	511
10.	$2^9 = 512$	1 023
11.	$2^{10} = 1 024$	2 047
12.	$2^{11} = 2 048$	4 095
13.	$2^{12} = 4 096$	8 191
14.	$2^{13} = 8 192$	16 383
15.	$2^{14} = 16 384$	32 767
16.	$2^{15} = 32 768$	65 535
17.	$2^{16} = 65 536$	131 071
18.	$2^{17} = 131 072$	262 143
19.	$2^{18} = 262 144$	524 287
20.	$2^{19} = 524 288$	1 048 575
21.	$2^{20} = 1 048 576$	2 097 151
22.	$2^{21} = 2 097 152$	4 194 303
23.	$2^{22} = 4 194 304$	8 388 607
24.	$2^{23} = 8 388 608$	16 777 215
25.	$2^{24} = 16 777 216$	33 554 431
26.	$2^{25} = 33 554 432$	67 108 863
27.	$2^{26} = 67 108 864$	134 217 727
28.	$2^{27} = 134 217 728$	268 435 455
29.	$2^{28} = 268 435 456$	536 870 911
30.	$2^{29} = 536 870 912$	1 073 741 823
31.	$2^{30} = 1 073 741 824$	2 147 483 647
32.	$2^{31} = 2 147 483 648$	4 294 967 295
33.	$2^{32} = 4 294 967 296$	8 589 934 591

34.	$2^{33} = 8\,589\,934\,592$	17 179 869 183
35.	$2^{34} = 17\,179\,869\,184$	34 359 738 367
36.	$2^{35} = 34\,359\,738\,368$	68 719 476 735
37.	$2^{36} = 68\,719\,476\,736$	137 438 953 471
38.	$2^{37} = 137\,438\,953\,472$	274 877 906 943
39.	$2^{38} = 274\,877\,906\,944$	549 755 813 887
40.	$2^{39} = 549\,755\,813\,888$	1 099 511 627 775
41.	$2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$	2 199 023 255 551
42.	$2^{41} = 2\,199\,023\,255\,552$	4 398 046 511 103
43.	$2^{42} = 4\,398\,046\,511\,104$	8 796 093 022 207
44.	$2^{43} = 8\,796\,093\,022\,208$	17 592 186 044 415
45.	$2^{44} = 17\,592\,186\,044\,416$	35 184 372 088 831
46.	$2^{45} = 35\,184\,372\,088\,832$	70 368 744 177 663
47.	$2^{46} = 70\,368\,744\,177\,664$	140 737 488 355 327
48.	$2^{47} = 140\,737\,488\,355\,328$	281 474 976 710 655
49.	$2^{48} = 281\,474\,976\,710\,656$	562 949 953 421 311
50.	$2^{49} = 562\,949\,953\,421\,312$	1 125 899 906 842 623
51.	$2^{50} = 1\,125\,899\,906\,842\,624$	2 251 799 813 685 247
52.	$2^{51} = 2\,251\,799\,813\,685\,248$	4 503 599 627 370 595
53.	$2^{52} = 4\,503\,599\,627\,370\,596$	9 007 199 254 740 991
54.	$2^{53} = 9\,007\,199\,254\,740\,992$	18 014 398 509 481 983
55.	$2^{54} = 18\,014\,398\,509\,481\,984$	36 028 797 018 963 967
56.	$2^{55} = 36\,028\,797\,018\,963\,968$	72 057 594 037 927 935
57.	$2^{56} = 72\,057\,594\,037\,927\,936$	144 115 188 075 855 871
58.	$2^{57} = 144\,115\,188\,075\,855\,872$	288 230 376 151 711 743
59.	$2^{58} = 288\,230\,376\,151\,711\,744$	576 460 752 303 423 487
60.	$2^{59} = 576\,460\,752\,303\,423\,488$	1 152 921 504 606 846 975
61.	$2^{60} = 1\,152\,921\,504\,606\,846\,976$	2 305 843 009 213 693 951
62.	$2^{61} = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,952$	4 611 686 018 427 387 903
63.	$2^{62} = 4\,611\,686\,018\,427\,387\,904$	9 223 372 036 854 775 807
64.	$2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$	18 446 744 073 709 551 615